

Aufgabe 1: Vermischte Aufgaben (18 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen. Beachten Sie bitte, dass in der Regel stichpunktartige Antworten ausreichen. Wenn möglich, geben Sie auch eine Begründung Ihrer Antwort bzw. den Rechenweg an.

Allgemeine Fragen

- a) Was ist eine Fensterfunktion? (1 Punkt)
- b) Was muss für die mittlere Frequenz eines Fensters gelten, damit sie sich bei Skalierung mit einem Skalierungsfaktor $a > 0$ verändert? (1 Punkt)
- c) Geben Sie die untere Grenze für das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt an. Existiert ein Signal, welches diese Grenze erreicht? (1 Punkt)

Energiesignale

Gegeben ist das Signal

$$x(t) = c \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot r_T(t), \quad c > 0.$$

- d) Zeigen Sie, dass es sich dabei um ein Energiesignal handelt. (3 Punkte)
- e) Bestimmen Sie den Faktor c so, dass die Signalenergie auf $E_x = 1$ normiert wird. (2 Punkte)

Basis und Frame

- f) Wie können die Koeffizienten zur Signaldarstellung bei einem Frame bestimmt werden? (2 Punkte)

Gegeben ist ein Vektorensystem in $\mathbb{R}^2$ mit $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- g) Bestimmen Sie die Gramsche Matrix des Vektorensystems. (2 Punkte)
- h) Worum handelt es sich bei dem Vektorensystem? (Begründung) (1 Punkt)
- i) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Signaldarstellung

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^2 a_i \varphi_i$$

für den Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. (2 Punkte)

Gegeben ist nun ein Vektorensystem in $\mathbb{R}^2$ mit $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\varphi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- j) Bestimmen Sie die Gramsche Matrix des Vektorensystems. (2 Punkte)
- k) Worum handelt es sich bei dem Vektorensystem? (Begründung) (1 Punkt)

Aufgabe 2: Kurzzeit-Fourier-Transformation (10 Punkte)

Kurzzeit-Fourier-Transformation

- a) Berechnen Sie die Kurzzeit-Fourier-Transformierte des Signals $x(t - t_0)$ in Abhängigkeit der Kurzzeit-Fourier-Transformation des Signals $x(t)$. (2 Punkte)
- b) Zeichnen Sie die Kurzzeit-Fourier-Transformierten der folgenden Signale qualitativ in die dafür vorgesehenen Lösungsblätter ein:

- $x_1(t) = e^{j2\pi \frac{F}{2} t}$
- $x_2(t) = e^{-\alpha(t-\frac{T}{4})^2} e^{j2\pi \frac{F}{4} t} + e^{-\alpha(t-\frac{3T}{4})^2} e^{j2\pi \frac{F}{2} t}$
- $x_3(t) = \sin\left(2\pi\left(\frac{F}{4} + \frac{F}{4T} \cdot t\right) \cdot t\right)$

Kennzeichnen Sie hohe Signalenergien mit dunkler Farbe. Benutzen Sie bitte keinen Bleistift! (4 Punkte)

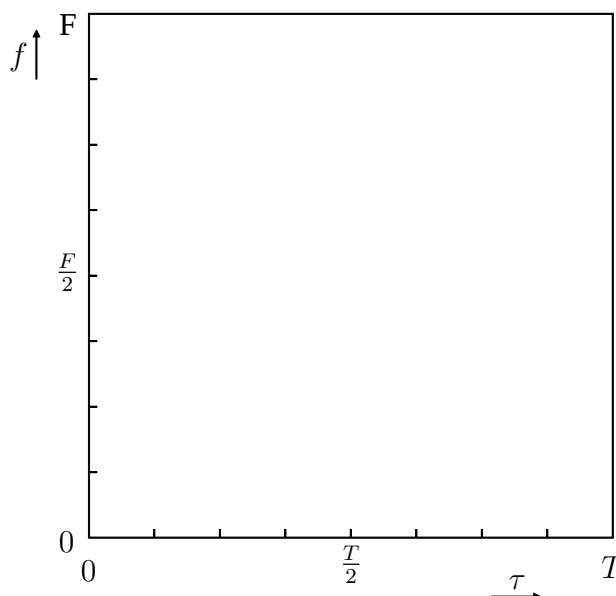


Bild 1: $S_{x_1}^\gamma(\tau, f)$

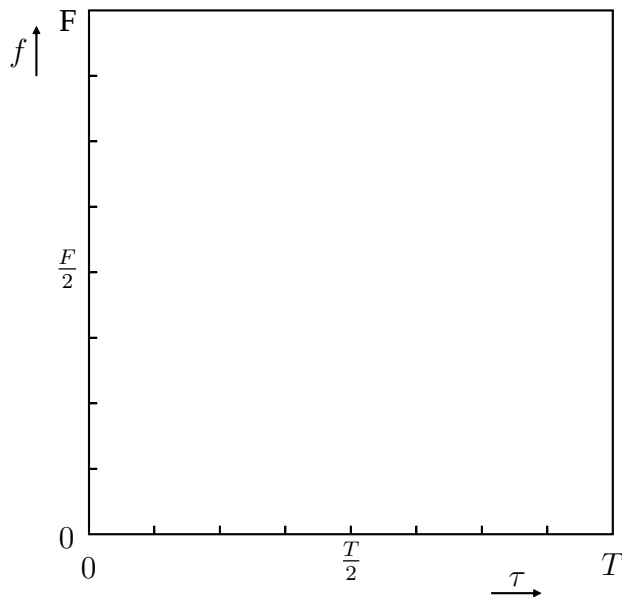


Bild 2: $S_{x_2}^\gamma(\tau, f)$

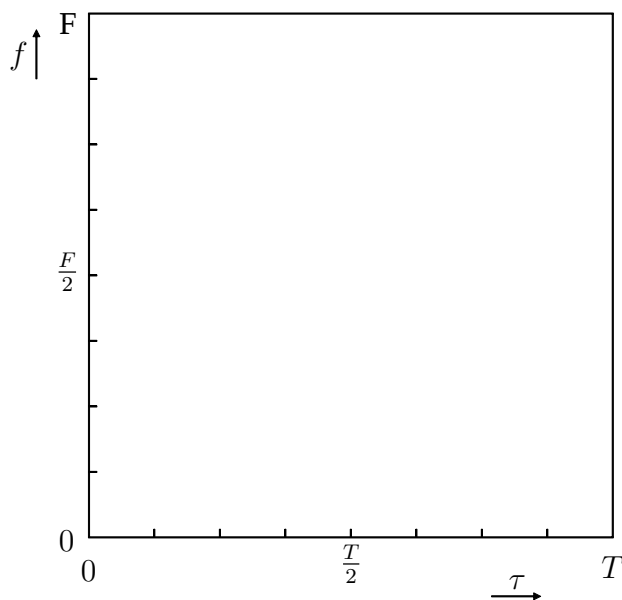


Bild 3: $S_{x_3}^\gamma(\tau, f)$

Gegeben sei das Signal

$$x(t) = \delta(t - t_0) + \delta(t - t_1).$$

Anhand des Analysefensters

$$\gamma(t) = \left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{1/4} \cdot \exp(-\beta t^2)$$

soll das gegebene Signal $x(t)$ mit der Kurzzeit-Fourier-Transformation analysiert werden.

- c) Berechnen Sie die Kurzzeit-Fourier-Transformierte $F_x^\gamma(\tau, f)$ von $x(t)$ unter Verwendung des Analysefensters $\gamma(t)$. (3 Punkte)
- d) Skizzieren Sie das Spektrogramm $|F_x^\gamma(\tau, f)|^2$ in der Zeit-Frequenz-Ebene. (1 Punkt)

Aufgabe 3: Wavelet-Transformation (13 Punkte)

Kontinuierliche Wavelet-Transformation

- a) Wie kann die Wavelet-Transformierte $W_x^\psi(a, b)$ eines Signals $x(t)$ aus dessen Spektrum $X(f)$ berechnet werden? (Berechnungsvorschrift angeben) (1 Punkt)
- b) Wann gilt bei der Wavelet-Transformation Energieerhaltung? (1 Punkt)

Dyadische Wavelet-Transformation

Gegeben ist ein Signal $y(n)$, das mit einer Abtastfrequenz $f_A = \frac{1}{t_A}$ abgetastet wurde. Im Beobachtungsintervall Nt_A liegen $N = 8$ Abtastwerte vor.

- c) Zeichnen Sie in das vorgefertigte Diagramm in Bild 4 das Abtastraster der Zeit-Frequenz-Ebene bei einer 8-Punkte Fourier-Transformation ein. Welche Frequenzauflösung Δf ergibt sich dabei? (2 Punkte)
- d) Zeichnen Sie in Bild 5 das Abtastraster der Zeit-Frequenz-Ebene bei einer diskreten Kurzzeit-Fourier-Transformation mit der diskreten Zeitverschiebung $T = t_A$ und der diskreten Frequenzverschiebung $F = f_A/4$. (2 Punkte)
- e) Zeichnen Sie in Bild 6 die Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei einer dreistufigen diskreten Wavelet-Transformation (Multiraten-Filterbank) ein. Die gestrichelten Linien im Diagramm markieren die Einteilung durch die Skalierungsfunktionen des Raumes V_0 . (2 Punkte)

Markieren Sie am Rand des Diagramms die Frequenzbereiche, die durch die Waveleträume W_1, W_2, W_3 und V_3 abgedeckt werden. (2 Punkte)

- f) Nun soll das Signal mit Hilfe einer dreistufigen Wavelet-Packet-Transformation analysiert werden. Die gewählte Filterbank ist in Abbildung 7 abgebildet. Zeichnen Sie in Bild 8 die resultierende Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene ein. (3 Punkte)

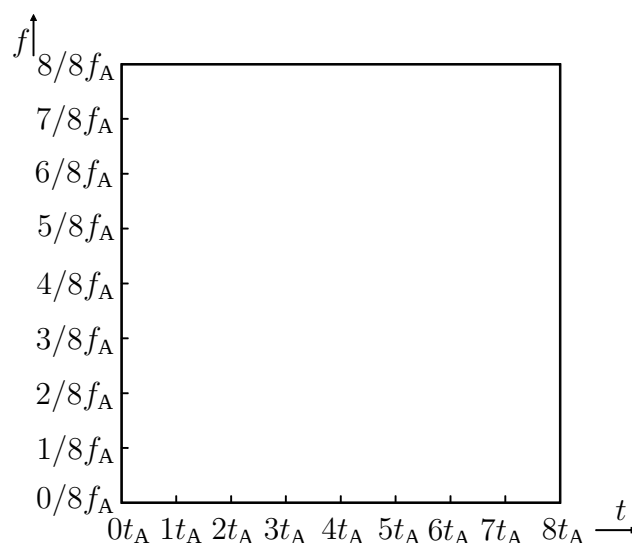


Bild 4: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei diskreter 8-Punkte Fourier-Transformation

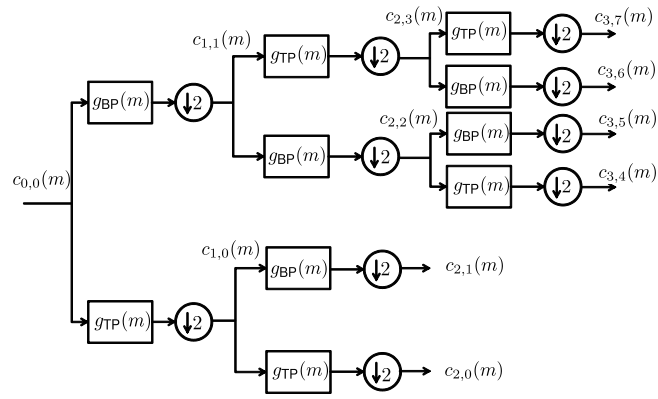


Bild 7: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei Wavelet-Packet-Transformation

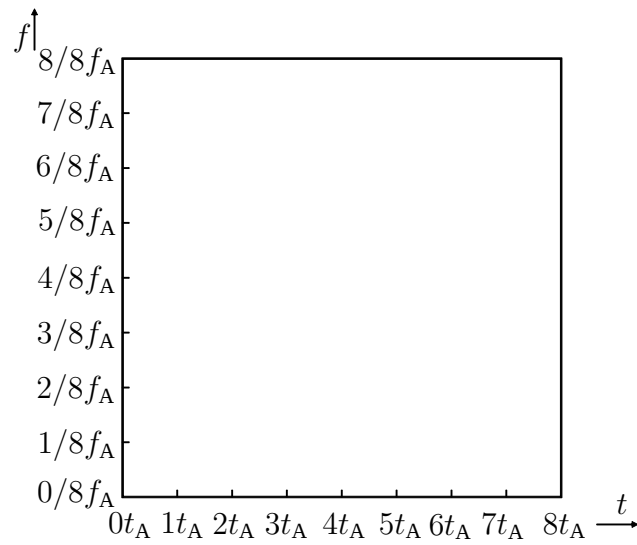


Bild 5: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei diskreter Kurzzeit Fourier-Transformation mit $T = t_A$ und $F = f_A/4$.

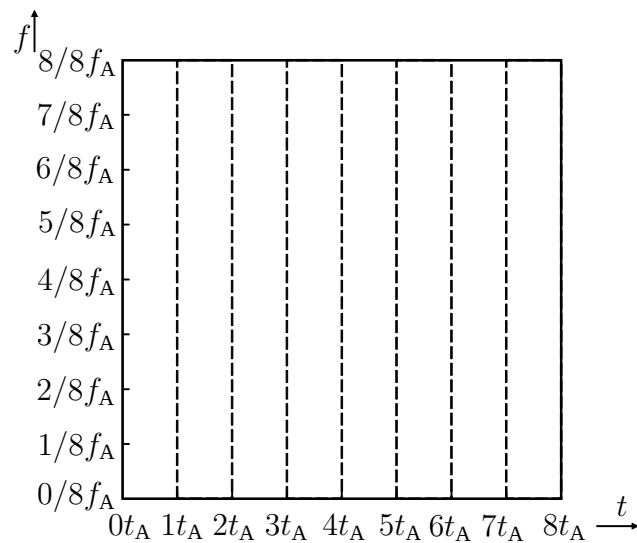


Bild 6: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei dreistufiger Multiraten-Filterbank.

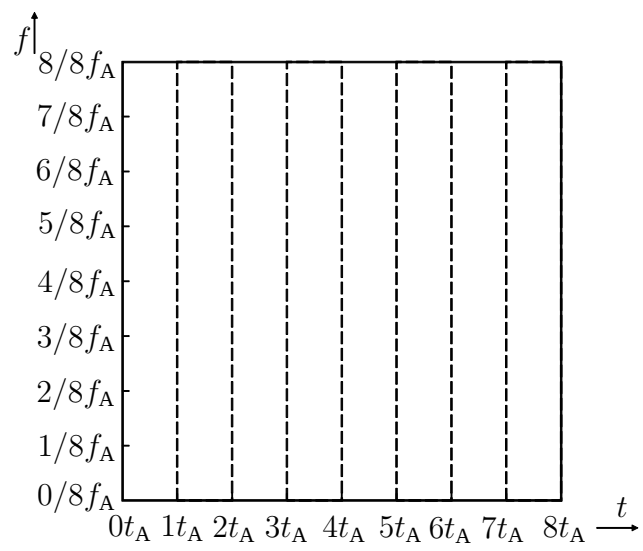


Bild 8: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei Wavelet-Packet-Transformation

Aufgabe 4: Wigner-Ville-Verteilung (14 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen. Beachten Sie bitte, dass in der Regel stichpunktartige Antworten ausreichen. Wenn möglich, geben Sie auch eine Begründung Ihrer Antwort bzw. den Rechenweg an.

- a) Wodurch sind die Kreuzterme bei der Wigner-Ville-Verteilung begründet? (1 Punkt)
- b) Nennen Sie zwei Möglichkeiten, wie Kreuzterme unterdrückt werden können. Was passiert dabei? (2 Punkte)
- c) Was ergibt sich aus der Cohen-Klasse, wenn als Kernfunktion $\Pi(t, f)$ die Wigner-Ville-Verteilung $W_{\gamma, \gamma}(-t, -f)$ einer Fensterfunktion verwendet wird? (1 Punkt)

Im Folgenden soll das Signal $x(t) = e^{j2\pi f_1 t} + e^{j2\pi f_2 t}$ mit Hilfe der Wigner-Ville-Verteilung analysiert werden.

- d) Bestimmen Sie den Wignerkernel $w_{xx}(t, \tau) = x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2})$. (4 Punkte)
- e) Bestimmen Sie die Wigner-Ville-Verteilung $W_{xx}(t, f)$ des Signals. Kennzeichnen Sie die Auto- und Kreuzterme. (4 Punkte)
- f) Skizzieren Sie $W_{xx}(t, f)$ im dafür vorgesehenen Diagramm. Kennzeichnen Sie die Auto- und Kreuzterme. (2 Punkte)

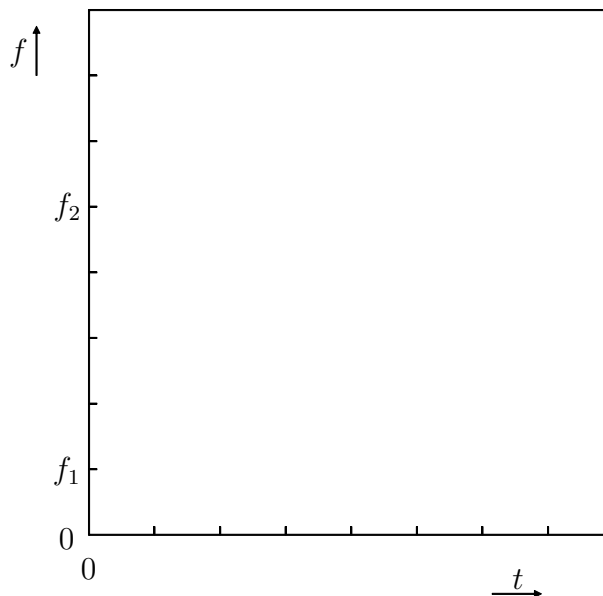


Bild 9: $W_{xx}(t, f)$ in der Zeit-Frequenz-Ebene

Aufgabe 5: Parameterschätzverfahren (27 Punkte)

Lineares Signalmodell

Als Temperatursensoren können Pt₁₀₀-Elemente verwendet werden, indem die Temperaturabhängigkeit ihres Widerstandes ausgenutzt wird. Für Temperaturen $\theta > 100^\circ\text{C}$ lässt sich die Widerstandskennlinie näherungsweise durch ein quadratisches Polynom beschreiben

$$R(\theta) = R_0(1 + a\theta + b\theta^2).$$

Dabei ist $R_0 = 100\text{ Ohm}$ der Kaltwiderstand bei 0°C . Durch N Messungen der Widerstandswerte $R(\theta)$ für verschiedene Temperaturen sollen die Parameter a und b der Kennlinie mittels eines Least-Squares-Schätzers geschätzt werden. Die Messung wird dabei von mittelwertfreiem Gaußschen weißen Rauschen überlagert

$$y(n) = R(n) + e(n).$$

- a) Stellen Sie das lineare Signalmodell für eine Messung $y(n)$ auf. (1 Punkt)
- b) Wie viele Messungen werden mindestens benötigt um die Parameter zu schätzen? (1 Punkt)

Aus der gegebenen Messreihe mit $N = 5$ Messungen sollen die Parameter a und b der Kennlinie geschätzt werden.

n	$\theta/^\circ\text{C}$	y/Ohm
1	110	142,282
2	115	144,195
3	120	146,035
4	125	147,975
5	130	149,828

- c) Stellen Sie das Signalmodell für die N Messungen in Vektor-Matrix Notation auf. Kennzeichnen Sie dabei den Messvektor, den Parametervektor und die Beobachtungsmatrix. (1 Punkt)

Minimum-Varianz-Schätzer

An einem Kondensator C liegt die Spannung U_0 an. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Kondensator an einen Widerstand R angeschlossen, so dass er sich zu entladen beginnt. Der zeitliche Verlauf der Spannung über dem Kondensator

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad \alpha = \frac{1}{R \cdot C} > 0$$

wird ab dem Zeitpunkt $t = 0$ zeitdiskret gemessen (Abtastzeit T). Bei der Messung tritt ein additiv überlagerter Fehler auf, der als Gauß'sches weißes Rauschen angenommen wird. Es sei bekannt, dass sich die Rauschleistung ebenfalls exponentiell ändert:

$$\sigma_e^2(t) = \sigma_0^2 \cdot e^{-\beta t}, \quad \beta > 0$$

Aus N aufgenommenen Messwerten $y(n)$, $n = 0, \dots, N-1$ soll die Anfangsspannung U_0 geschätzt werden. Die Parameter R und C werden dabei als bekannt vorausgesetzt.

- d) Stellen Sie ein lineares Signalmodell für y auf. (2 Punkte)
- e) Berechnen Sie einen Schätzwert für U_0 mithilfe eines Minimum-Varianz-Schätzers. (8 Punkte)
- f) Geben Sie (ohne Rechnung) den Schätzwert bei Verwendung eines Least-Squares-Schätzers an. (2 Punkte)

Bayes-Schätzung

Die Lebensdauer eines elektrischen Bauelements wird im Folgenden mit Hilfe einer Exponentialverteilung beschrieben. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Lebensdauer t lautet dabei

$$f(t|\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Der Parameter λ wird als Ausfallrate bezeichnet und ist die Inverse des durchschnittlichen Ausfallzeitpunktes

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda}.$$

Aus N statistisch unabhängigen Messungen t_n , $n = 1 \dots N$ der Lebensdauern soll die Ausfallrate mit einem Maximum-Likelihood-Schätzer geschätzt werden.

Hinweis:

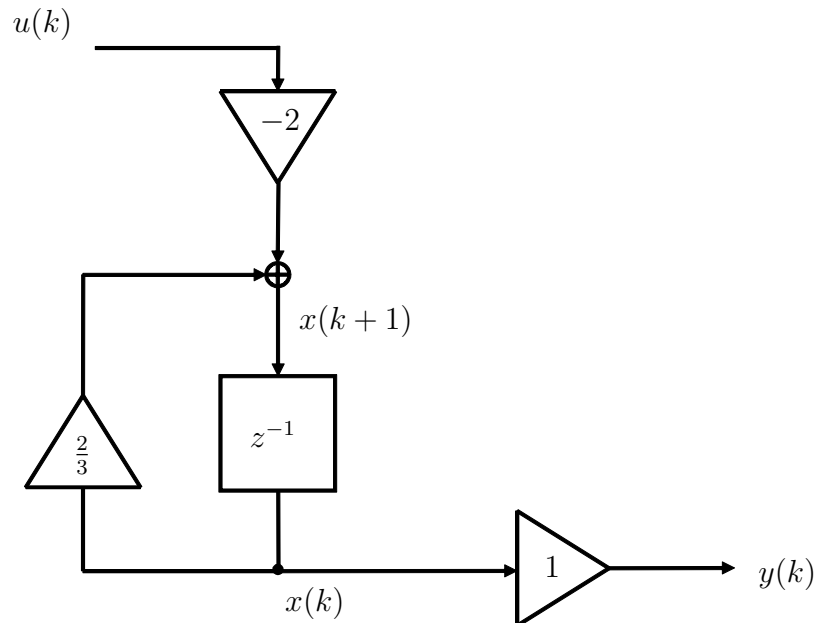
$$E\{t_n\} = \frac{1}{\lambda}$$

- g)** Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion $\ln f(t|\lambda)$ für N Messwerte. *(4 Punkte)*
- h)** Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für die Ausfallrate λ aus N Messungen. *(3 Punkte)*
- i)** Ist der Schätzer erwartungstreu? *(2 Punkte)*
- j)** Welchen Wert müsste die Schätzfehlerkovarianz annehmen, damit der Schätzer effizient ist? *(3 Punkte)*

Aufgabe 6: Zustandsschätzverfahren (18 Punkte)

- a) Erklären Sie anschaulich, wie sich das Systemrauschen v und das Messrauschen w bzw. deren Kovarianzmatrizen Q und R auf die Zustandsschätzung mittels eines Kalman-Filters auswirken. (2 Punkte)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



- b) Geben Sie die Gleichungen des Zustandsraummodells an. (1 Punkt)
- c) Ist das System stabil? (1 Punkt)

Das System wird von der deterministischen Eingangsgröße $u(k)$ angeregt. Störungen treten in Form eines Systemrauschens $v(k)$ und eines Ausgangsrauschens $w(k)$ auf. Beide Prozesse sind Gauß'sche weiße Rauschprozesse mit den Varianzen

$$E\{v(k)^2\} = Q(k) \quad \text{und} \quad E\{w(k)^2\} = R(k).$$

Für die Gewichtung des Systemrauschens gilt $L = 1$. Im Folgenden soll für dieses System ein Kalman-Filter entworfen werden.

- d) Stellen Sie die Rekursionsgleichungen des Kalman-Filters für das gegebene System auf. Zeichnen Sie das Blockschaltbild von System und Kalman-Filter. Tragen Sie die numerischen Werte des Systems in die entsprechenden Blöcke ein und kennzeichnen Sie, welcher Teil des Blockschaltbildes zum Kalman-Filter gehört. (4 Punkte)
- e) Sie möchten nun eine Zustandsschätzung mittels Kalman-Filter durchführen. Die Anfangswerte des Zustandes sind unbekannt. Für welche Größen werden Startwerte benötigt? Wie würden Sie bei der Initialisierung vorgehen? (3 Punkte)

Im Folgenden gelte für die Varianzen der Rauschprozesse

$$Q(k) = 1 \quad \text{und} \quad R(k) = 1.$$

- f) Im Falle eines zeitinvarianten Systems und zeitinvarianten Rauschprozesse konvergiert der Verstärkungsfaktor für $k \rightarrow \infty$. Berechnen Sie den stationären Endwert $K_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} K(k)$.

Hinweis: Stellen Sie zunächst eine Rekursionsgleichung der Form $\hat{P}(k+1) = f(\hat{P}(k))$ auf. Der Grenzwert $\hat{P}_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{P}(k)$ erfüllt die Gleichung $\hat{P}_\infty = f(\hat{P}_\infty)$.

(7 Punkte)

